ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Α. ΤΟΛΙΑΣ, Ε. ΝΙΚΟΛΙΔΑΚΗΣ, 3/2/2020

Θέμα 1. [1 μον.]
Να λυθεί η εξίσωση $2\cos^4 x + 7\cos^2 x - 4 = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε ποιες από τι λύσεις της ανήκουν στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 2. [1 μον.]
Αν η πρόταση $(\sim p) \wedge q$ είναι αληθής να δείξετε ότι η πρόταση $p \vee [p \Leftrightarrow (\sim q)]$ είναι επίσης αληθής. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο. [Υπόδειξη: Να κάνετε ένα κοινό πίνακα αλήθειας για τις δύο προτάσεις].

Θέμα 3. [2 μον.]
(α) Αν A, B είναι δύο σύνολα και ισχύει $A \cap B = A \setminus B$ να δείξετε ότι $A = \emptyset$.

(β) Αν X, Y είναι δύο σύνολα, $X \neq \emptyset$ και ισχύει $X \times \{1\} = \{2\} \times Y$ να δείξτε ότι $Y = \{1\}$.

Θέμα 4. [2 μον.]
(α) Στο σύνολο $E = [0, +\infty)$ ορίζουμε τη σχέση σ ως εξής:

$$x\sigma y \;\Leftrightarrow\; 2x \leq y.$$

Να εξετάσετε αν η σ είναι αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.

(β) Στο σύνολο $E = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$ να ορίσετε μια γραμμική διάταξη $\leq$ (καταγράφοντας το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που την αποτελούν), ώστε το δ να είναι ελάχιστο στοιχείο, το β μέγιστο στοιχείο, και να ισχύει $a \leq \gamma$.

Θέμα 5. [2 μον.]
Α. Έστω $f : \Gamma \to \Delta$ μια συνάρτηση.

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $X, Y \subseteq \Gamma$ ισχύει $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

(β) Αν η f είναι $1-1$ να δείξετε ότι για κάθε $X, Y \subseteq \Gamma$ ισχύει $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

(γ) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι η υπόθεση ότι η f είναι $1-1$ δεν μπορεί να παραλειφθεί στο ερώτημα (β).

Β. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-1)^2$ και $A = [-1, 4]$ να υπολογιστούν τα σύνολα $f^{-1}(A)$ και $f(f^{-1}(A))$.

Θέμα 6. [1,5 μον.]
(α) Πότε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό; Να δείξετε ότι η τομή μια τυχαίας οικογένειας επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο. Να ορίσετε το σύνολο των φυσικών αριθμών.

(β) Έστω A, B δυο μη κενά και κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$\Gamma = \{x + y : \; x \in A, \; y \in B\}$$

Να δείξετε ότι $\inf \Gamma = \inf A + \inf B$.

Θέμα 7. [1,5 μον.]
(α) Να δώσετε τον ορισμό της ισοπληθικότητας συνόλων και να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι τα σύνολα $[0, 1]$ και $[0, 1)$ είναι ισοπληθικά.

(β) Αν K, Λ είναι δύο σύνολα ώστε $K \setminus \Lambda \simeq \Lambda \setminus K$ να δείξετε ότι $K \simeq \Lambda$.

Καλή επιτυχία!